ÉNONCÉ

(E, q) espace quadratique réel de dimension n.

1. Il existe une base q-orthogonale de E

2. TH. INERTIE SYLVESTER : $\exists! \, (s,t) \in \mathbb{N}^2$, $s+t = r = Rg(q)$ et tq $\exists \mathcal{B}$ base de E dans laquelle q s'écrit $q = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2$

3. Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'ens des sev F de E tq $q_{|F}$ déf pos (resp. déf nég.)
   On a : $s = \max_{E^+ \in \mathcal{P}} \dim(E^+)$; $t = \max_{E^- \in \mathcal{N}} \dim(E^-)$ (max $\dim (\phi| = 0)$).

LEÇONS.

148

170

171

RÉFS.

[P] Perrin - Cours d'algèbre . p. 122 **1** ; p. 127 **2**

[Rb] Rombaldi . Algèbre et géométrie . p. 476 **3**.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

DÉMO

■ : à l'oral. ■ : pour comprendre.

■ écrit au tableau. ■ : structure

. E $\mathbb{R}$-ev, $\dim(E) = n \geq 1$, $q \in Q(E)$ $rg(q) = R$.

PLAN :

① existence d'une base q-ortho

② th. Sylvester ($\exists$, unicité signature, base orthonormale)

① cas non dégé

On procède par récu sur n.

$\mathcal{H}(d)$: " $\forall$ $\mathbb{R}$-ev, $\dim(V) = d$ et $q \in Q(V)$ non dégénérée : il existe une base q-ortho de V".

(I) $d = 1$: ok.

(H) Sq $\mathcal{H}(d-1)$ vraie. Soit V $\mathbb{R}$-ev de dimension d, $q \in Q(V)$.

On va réduire la dim en décomposant en somme directe.

Soit $e_1 \in V \setminus \{0\}$ tel que $q(e_1) \neq 0$ → non isotrope.

↳ existe car q est non nulle (non dégé)

Soit $H = \{e_1\}^\perp$.

Comme q est non dégénérée, $\dim(H^\perp) = d-1$ et $V = \{e_1\} \overset{\perp}{\oplus} H$.
↳ e_1 non isot

on veut ense HR : besoin hyp non dégé de $q_{|H}$.

$\ker(q_{|H}) = \{x \in H, \forall y \in H, bq(x,y) = 0\} = H \cap \overbrace{H^\perp}^{=\{e_1\}} = \{0\}$: $q_{|H}$ non dégénérée.

Par HR, il existe une boq $(e_2, .., e_d)$ pour H.

Alors $(e_1 .. e_d)$ boq de V et $\mathcal{H}(d)$ est vraie.

Donc $\forall d \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}(d)$ vraie.

Cas général :

on va regarder q sur un espace où elle est non dégé : on tue le noyau.

Soit F supplé de $\ker(q)$ ds E. → $\exists$ tjrs

. On a : $F^\perp \subset \ker(q)$ donc la somme directe est orthogonale.

En effet, si $x \in F^\perp$: $\forall y \in F$, $bq(x,y) = 0$

$\forall y \in E$, $y = x_F + x_k$ $\underbrace{bq(x_F, x)}_{=0 \ x \in F^\perp} + \underbrace{bq(x, x_k)}_{=0 \ x_k \in \ker(q)}$

$\ker(q_{|F}) = F \cap F^\perp \subset F \cap \ker(q) = \{0\}$

Donc $q_{|F}$ est non dégénérée.

On applique cas préc à $q_{|F}$ et on complète la base

On obt une base ortho de F et on la complète : $\forall$ $q_{|\ker q} = 0$ et $\overset{\perp}{\oplus}$, on a le ré

(2) ∃! couple (s,t) tq ds une bonne base q s'écrive de la forme tq décrite ds ma place.

EXISTENCE on vient de montrer un rés d'existence, on part de là.

On prend (v_i) base q-orthogonale (strict) . $\forall x \in E$,

désigne la base duale

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(v_i)\left(v_i^*(x)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(q(v_i)) \Big(\underbrace{\sqrt{|q(v_i)|}\, v_i^*(x)}_{f_i^*(x)}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{s} f_i^*(x) - \sum_{i=s+1}^{r} f_i^*(x) + 0$$

quitte à réordonner

avec $\varepsilon(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a > 0 \\ -1 \text{ si } a < 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

La base $\mathcal{B} = (f_i)_{1 \le i \le n}$ antéduale de (f_i^*) convient

UNICITÉ : (mq la signature est bien déf : la classe congruence déter par (s,t))

Supposons qu'il existe $\mathcal{B}' : (e_i)$ bog de E, $s', t' \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} I_{s'} & & \\ & -I_{t'} & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Rq : $s' + t' = s + t = rg(q)$.

comme on a la rela avec le rg, il suffit de mq $s = s'$.

Mq $s = s'$:

Notons $F = \mathrm{Vect}(f_1 .. f_s)$ → $\dim = s$

$G = \mathrm{Vect}(e_{s'+1}, .. e_n)$. → $\dim = n - s'$

On va regarder la dim de la somme pr avoir un lien entre s et s'

Mq $F \cap G = \{0\}$:

si $s = 0$: ok

sinon : sq $s \geq 1$

$F \setminus \{0\} \neq \emptyset$

$$\forall x \in F \setminus \{0\}, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{s} \overbrace{q(f_i)}^{=1} x_i^2 > 0$$

$$\forall x \in G, \quad q(x) = \sum_{i=s'+1}^{n} \underbrace{q(e_i)}_{= \cdot 1} x_i^2 \le 0.$$

Donc $F \cap G = \{0\}$

Et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = s + n - s' \le n$ donc $s \le s'$.

Par symétrie : $s = s'$.

D'où l'unicité.

SI LE TEMPS :

- $P = \{F$ sev de E, $q_{|F} \in Q^{++}(F)\}$.

  $s' := \max_{F \in P} \dim(F)$.

Ortho stable par P. (ni chose N).

$\mathrm{sign}(q) := (s,t) \in \mathbb{N}^2$

Mq $s = s'$:

Par déf : $s \leq s'$ (car sur n'importe quelle base les s 1ers vecteurs vérif $q(e_i) > 0$)

si $P = \emptyset$: $s = s' = 0$

si $P \neq \emptyset$: Soit $F \in P$ tq $\dim(F) = s'$.

Soit $(e_1, \dots, e_{s'})$ base q-ortho de F que l'on complète en une base q-ortho de E (psb par la démo de l'existence d'une base ortho)

Par maximalité de F, $q(e_{s'+1}), \dots q(e_n) \leq 0$.

Par unicité de $\mathrm{sign}(q)$, $s = s'$.